数学Ⅱ　確認プリント　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　)

1．次の等式を証明せよ。

(1)　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

右辺$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+3a^2b-3ab^2$

$=a^3-b^3=$左辺

よって　$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

(2)　$a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$

右辺$=a^2-ab+\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{3}{4}b^2$

$=a^2-ab+b^2=$左辺

よって　$a^2-ab+b^2=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2$

(3)　$(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

左辺$=1+3x+3x^2+x^3$

右辺$=1+x+x+x^2+x(1+2x+x^2)$

$=1+2x+x^2+x+2x^2+x^3$

$=1+3x+3x^2+x^3$

左辺と右辺が同じ式になるから

$(1+x)^3=1+x+x(1+x)+x(1+x)^2$

2．$a+b=c$ のとき，次の等式を証明せよ。

$a^2+bc=b^2+ca$

$c=a+b$ であるから

左辺$-$右辺$=a^2+bc-(b^2+ca)$

$=a^2+b(a+b)-b^2-(a+b)a$

$=a^2+ab+b^2-b^2-a^2-ab$

$=0$

よって　$a^2+bc=b^2+ca$

3．$a+b+c=0$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1)　$a^2+ca=b^2+bc$

$a+b+c=0$ より $c=-a-b$ であるから

左辺$-$右辺$=a^2+ca-(b^2+bc)$

$=a^2+(-a-b)a-b^2-b(-a-b)$

$=a^2-a^2-ab-b^2+ab+b^2$

$=0$

よって　$a^2+ca=b^2+bc$

(2)　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

$a+b+c=0$ より

$b+c=-a$，$c+a=-b$，$a+b=-c$

であるから

左辺$=ab(-c)+bc(-a)+ca(-b)+3abc$

$=-3abc+3abc=0$

よって　$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

4．$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき，次の等式を証明せよ。

(1)　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

よって　左辺$=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

右辺$=\dfrac{2bk-3dk}{2b-3d}=\dfrac{k(2b-3d)}{2b-3d}=k$

したがって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{2a-3c}{2b-3d}$

(2)　$\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと　$a=bk$，$c=dk$

よって　左辺$=\dfrac{(bk)^2+(dk)^2}{b^2+d^2}=\dfrac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2}=k^2$

右辺$=\dfrac{(bk)^2}{b^2}=\dfrac{b^2k^2}{b^2}=k^2$

したがって　$\dfrac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\dfrac{a^2}{b^2}$

5．$x>y$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$3x-4y>2x-3y$

$(3x-4y)-(2x-3y)=x-y$

$x>y$ より $x-y>0$ であるから

$(3x-4y)-(2x-3y)>0$

したがって　$3x-4y>2x-3y$

6．$x>2$，$y>3$ のとき，次の不等式を証明せよ。

$xy+6>3x+2y$

$(xy+6)-(3x+2y)=xy-3x-2y+6$

$=x(y-3)-2(y-3)$

$=(x-2)(y-3)$

$x>2$，$y>3$ より，$x-2>0$，$y-3>0$ であるから

$(x-2)(y-3)>0$

よって　$(xy+6)-(3x+2y)>0$

したがって　$xy+6>3x+2y$

7．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1)　$x^2+4y^2\geqq 4xy$

$(x^2+4y^2)-4xy=x^2-4xy+4y^2$

$=(x-2y)^2\geqq 0$

したがって　$x^2+4y^2\geqq 4xy$

等号が成り立つのは，$x=2y$

(2)　$(x+y)^2 \geqq 4xy$

$(x+y)^2-4xy=x^2-2xy+y^2$
$=(x-y)^2 \geqq 0$

したがって　　$(x+y)^2 \geqq 4xy$

等号が成り立つのは，$x=y$ のときである。

8．次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1)　$a^2+2b^2 \geqq 2ab$

$(a^2+2b^2)-2ab=a^2-2ab+2b^2$
$=(a-b)^2-b^2+2b^2$
$=(a-b)^2+b^2 \geqq 0$

したがって　　$a^2+ab+b^2 \geqq 3ab$

等号が成り立つのは，$a-b=0$ かつ $b=0$,
すなわち $a=b=0$ のときである。

(2)　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

$a^2-ab+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2$
$=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$

したがって　　$a^2-ab+b^2 \geqq 0$

等号が成り立つのは，$a-\frac{b}{2}=0$ かつ $b=0$,
すなわち $a=b=0$ のときである。

9．$a>0$，$b>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つときを調べよ。

(1)　$a+\frac{4}{a} \geqq 4$

$a>0$，$\frac{4}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により
$$a+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}}=4$$
よって　　$a+\frac{4}{a} \geqq 4$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $a=\frac{4}{a}$,
すなわち $a=2$ のときである。

(2)　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$

$\frac{a}{b}>0$，$\frac{b}{a}>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}=2$$
よって　　$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqq 2$

等号が成り立つのは，$a>0$ かつ $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$,
すなわち $a=b$ のときである。

10. 次の複素数の実部と虚部をいえ。

(1)　$-3+5i$　　　実部 -3，虚部 5

(2)　$\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$　　　$\frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから
実部 $-\frac{1}{2}$，虚部 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　1　　　$1=1+0i$ であるから　　実部 1，虚部 0

(4)　$-i$　　　$-i=0+(-1)i$ であるから　　実部 0，虚部 -1

11. 次のような実数 x，y を求めよ。

(1)　$(x-3)+(x+y)i=0$

x，y が実数であるから，$x-3$，$x+y$ は実数である。
$x-3=0$，$x+y=0$
これを解いて　　$x=3$，$y=-3$

(2)　$(x-2y)+(2x-3y)i=4+7i$

x，y が実数であるから，$x-2y$，$2x-3y$ は実数である。
$x-2y=4$，$2x-3y=7$
これを解いて　　$x=2$，$y=-1$

12. 次の式を計算せよ。

(1)　$(2+3i)+(4+i)$

$=(2+4)+(3+1)i=6+4i$

(2)　$(-1+2i)+(3-4i)$

$=(-1+3)+(2-4)i=2-2i$

(3)　$(6+4i)-(3+2i)$

$=(6-3)+\{4-2\}i=3+2i$

(4)　$(2-3i)-(4-2i)$

$=(2-4)+\{-3-(-2)\}i=-2-i$

13. 次の式を計算せよ。

(1)　$(1+2i)(4+3i)$　　$=4+3i+8i+6i^2=4+3i+8i+6(-1)$
$=(4-6)+(3+8)i=-2+11i$

(2)　$(2-i)(3+4i)$　　$=6+8i-3i-4i^2=6+8i-3i-4(-1)$
$=(6+4)+(8-3)i=10+5i$

(3)　$(3+4i)(3-4i)$　　$=3^2-(4i)^2=9-(-16)=25$

(4)　$(2+3i)^2$　　$=4+12i+9i^2=4+12i+9(-1)$
$=(4-9)+12i=-5+12i$

14. 次の複素数と共役な複素数をいえ。

(1)　$2+3i$
$2-3i$

(2)　$1-i$
$1+i$

(3)　$\sqrt{3}\,i$
$-\sqrt{3}\,i$

(4)　$\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$
$\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

15. 次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{1+2i}{2+3i}$
$$=\frac{(1+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{2-3i+4i-6i^2}{2^2+3^2}=\frac{8+i}{13}$$

(2)　$\dfrac{1-i}{1+i}$
$$=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

(3)　$\dfrac{5i}{2-i}$
$$=\frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{10i+5i^2}{2^2+1^2}=\frac{-5+10i}{5}=-1+2i$$

(4)　$\dfrac{1}{i}$
$$=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i$$

16. 次の数を i を用いて表せ。

(1)　$\sqrt{-5}$
$\sqrt{5}\,i$

(2)　$\sqrt{-9}$
$=\sqrt{9}\,i=3i$

(3)　-27 の平方根
$\pm\sqrt{27}=\pm\sqrt{27}\,i=\pm3\sqrt{3}\,i$

17. 次の式を計算せよ。

(1)　$\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　$=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{12}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(2)　$\sqrt{-6}\sqrt{3}$　　$=\sqrt{6}\,i\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{18}\,i=3\sqrt{2}\,i$

(3)　$\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{2}}$　　$=\dfrac{\sqrt{8}\,i}{\sqrt{2}}=\sqrt{4}\,i=2i$

(4)　$\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}$　　$=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{2}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$