1 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　(2) $-\sin\theta+\cos\theta$

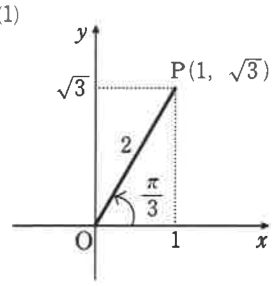
(3) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$　　(4) $\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$

解説

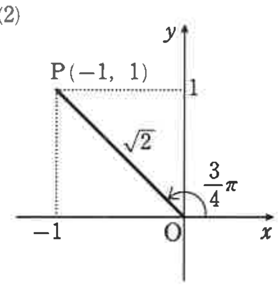
(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

(1)



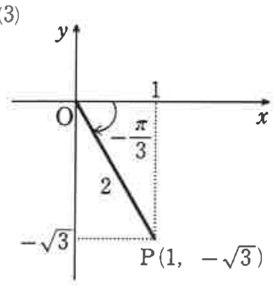
(2)



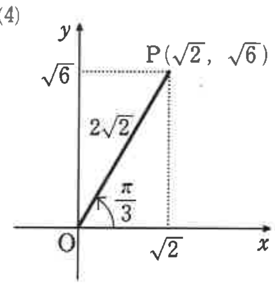
(3) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $\sqrt{6}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta+\sqrt{6}\cos\theta=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(3)



(4)



別解 (1) $\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから

与式$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ であるから

与式$=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)=\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{3}{4}\pi\right.$

$\left.+\cos\theta\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right)$

(3) $\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ であるから

与式$=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

(4) $\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$ であるから

与式$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\sqrt{2}\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

2 $0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$　　(2) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$

(3) $\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$　　(4) $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)>1$

解説

(1) 左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ であるから，

この範囲で ① を解くと　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$　または　$x-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$

よって　$x=\frac{\pi}{3}$，π

(2) 左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$ であるから，

この範囲で ① を解くと　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}\pi$　または　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{9}{4}\pi$

よって　$x=\frac{5}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(3) $\sin x\geqq\sqrt{3}\cos x$ から　$\sin x-\sqrt{3}\cos x\geqq0$

左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq0$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\geqq0$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$-\frac{\pi}{3}\leqq x-\frac{\pi}{3}<\frac{5}{3}\pi$ であるから，

この範囲で ① を解くと　$0\leqq x-\frac{\pi}{3}\leqq\pi$

よって　$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{4}{3}\pi$

(4) 左辺の三角関数を合成すると　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>1$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$ であるから，

この範囲で ① を解くと　$\frac{\pi}{4}\leqq x+\frac{\pi}{4}<\frac{5}{6}\pi$，$\frac{13}{6}\pi<x+\frac{\pi}{4}<\frac{9}{4}\pi$

よって　$0\leqq x<\frac{7}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi<x<2\pi$

3 関数 $y=-\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

解説

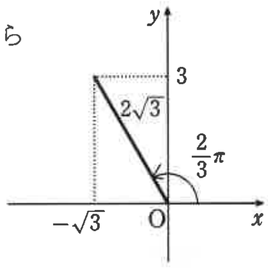
$-\sqrt{3}\sin x+3\cos x=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$ であるから

$y=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\leqq1$ であるから

$-2\sqrt{3}\leqq y\leqq2\sqrt{3}$

よって　y の最大値は $2\sqrt{3}$，最小値は $-2\sqrt{3}$



4 関数 $y=\sin x-\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

解説

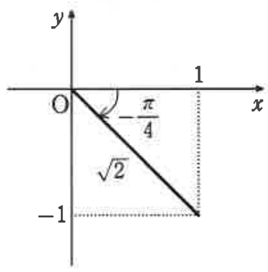
$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ であるから

$y=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$-1\leqq\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ であるから

$-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$

よって　y の最大値は $\sqrt{2}$，最小値は $-\sqrt{2}$



5 $0\leqq x<2\pi$ のとき，関数 $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

解説

右辺の三角関数を合成すると　$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

この範囲において，$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ は

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -2

をとる。

よって　$x=\frac{\pi}{6}$ で最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ で最小値 -2

6 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=3\sin x+4\cos x$　　(2) $y=\sin x-3\cos x$

解説

(1) $3\sin x+4\cos x=5\sin(x+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$

よって　$y=5\sin(x+\alpha)$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq1$ であるから　$-5\leqq y\leqq5$

ゆえに　y の最大値は 5，最小値は -5

(2) $\sin x-3\cos x=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$

ただし　$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

よって　$y=\sqrt{10}\sin(x+\alpha)$

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq1$ であるから　$-\sqrt{10}\leqq y\leqq\sqrt{10}$

ゆえに　y の最大値は $\sqrt{10}$，最小値は $-\sqrt{10}$

7 自己評価５～１で記入。５を最高評価とする。

（１）計画的に取り組めた。$\boxed{}$

（２）興味を持って取り組めた。$\boxed{}$