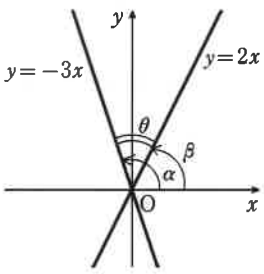
在宅教育　確認プリント４　３年生　解法数学ⅡB　課題⑩～⑫の後に解答　　３年６組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 次の2直線のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)　$y=-3x$，$y=2x$　　　(2)　$y=x$，$y=(2+\sqrt{3})x$

解説

(1)　右の図のように，2直線 $y=-3x$，$y=2x$ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\theta=\alpha-\beta$ である。

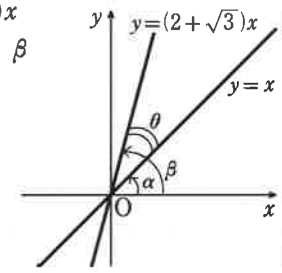


$\tan\alpha=-3$，$\tan\beta=2$
であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

(2)　右の図のように，2直線 $y=x$，$y=(2+\sqrt{3})x$ と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\theta=\beta-\alpha$ である。



$\tan\alpha=1$，$\tan\beta=2+\sqrt{3}$
であるから

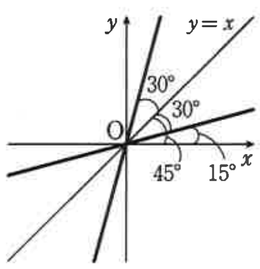
$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{(2+\sqrt{3})-1}{1+(2+\sqrt{3})\cdot 1}=\frac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

2 原点を通り，直線 $y=x$ とのなす鋭角が 30° である直線の方程式を求めよ。

解説

直線 $y=x$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=1$ であるから　　$\theta=45°$
よって，求める直線と x 軸の正の向きとのなす角は　　$45°\pm30°$
すなわち　　15°，75°
したがって，求める直線は，原点を通り，傾きが $\tan 15°$ または $\tan 75°$ の直線である。



ここで

$$\tan 15°=\tan(45°-30°)$$
$$=\frac{\tan 45°-\tan 30°}{1+\tan 45°\tan 30°}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$\tan 75°=\tan(45°+30°)$$
$$=\frac{\tan 45°+\tan 30°}{1-\tan 45°\tan 30°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

よって，求める直線の方程式は

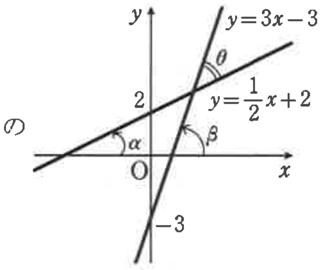
$$y=(2-\sqrt{3})x,\quad y=(2+\sqrt{3})x$$

3 2直線 $x-2y+4=0$，$3x-y-3=0$ のなす角 θ を求めよ。
ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

解説

$x-2y+4=0$ から　　$y=\dfrac{1}{2}x+2$

$3x-y-3=0$ から　　$y=3x-3$



右の図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，
$\theta=\beta-\alpha$ である。

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=3$　であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

4 次の点Pを，原点Oを中心として与えられた角だけ回転した位置にある点Qの座標を求めよ。

(1)　P(3, 4)，$\dfrac{\pi}{3}$　　　(2)　P(−8, 6)，$-\dfrac{\pi}{4}$

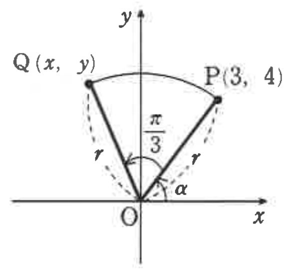
解説

OP$=r$，動径OPと x 軸の正の向きとのなす角を α，点Qの座標を $(x,\ y)$ とする。

(1)　P(3, 4) から

$3=r\cos\alpha$，$4=r\sin\alpha$

また，OQ$=r$ で，動径OQと x 軸の正の向きとのなす角は $\alpha+\dfrac{\pi}{3}$ であるから



$$x=r\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right),\quad y=r\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$

よって，加法定理により

$$x=r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{2}$$

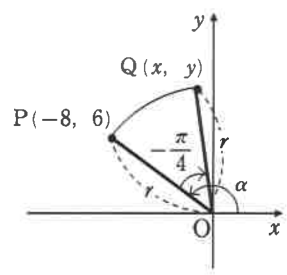
$$y=r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}=4\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}$$

したがって，点Qの座標は　　$\left(\dfrac{3-4\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)　P(−8, 6) から

$-8=r\cos\alpha$，$6=r\sin\alpha$

また，OQ$=r$ で，動径OQと x 軸の正の向きとのなす角は $\alpha-\dfrac{\pi}{4}$ であるから



$$x=r\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right),\quad y=r\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

よって，加法定理により

$$x=r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=(-8)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

$$y=r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-(-8)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$$

したがって，点Qの座標は　　$(-\sqrt{2},\ 7\sqrt{2})$

5 $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$ のとき $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$

(2) $\tan\alpha=2$ のとき $\tan 2\alpha$

(3) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ のとき $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$，$\tan\frac{\alpha}{2}$

解説

(1) $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

また　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{9}$

(2) $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot 2}{1-2^2}=-\frac{4}{3}$

(3) $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{4}{5}$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}=\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}=\frac{1}{5}$$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$ より，$\frac{\pi}{2}<\frac{\alpha}{2}<\frac{3}{4}\pi$ であるから　$\sin\frac{\alpha}{2}>0$，$\cos\frac{\alpha}{2}<0$

よって　$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$　　$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

また　$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\div\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-2$

6 半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$　　(2) $\cos\frac{7}{12}\pi$　　(3) $\tan\frac{3}{8}\pi$

解説

(1) $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin\frac{\pi}{12}>0$ であるから　$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

参考　２重根号をはずすと，次のようになる。

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=\sqrt{\frac{(3+1)-2\sqrt{3\cdot 1}}{8}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos^2\frac{7}{12}\pi=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{7}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\left\{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\cos\frac{7}{12}\pi<0$ であるから　$\cos\frac{7}{12}\pi=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

参考　２重根号をはずすと，次のようになる。

$$\cos\frac{7}{12}\pi=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=-\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}=-\sqrt{\frac{(3+1)-2\sqrt{3\cdot 1}}{8}}$$
$$=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(3) $\tan^2\frac{3}{8}\pi=\frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{1+\cos\frac{3}{4}\pi}=\frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=(\sqrt{2}+1)^2$$

$\tan\frac{3}{8}\pi>0$ であるから　$\tan\frac{3}{8}\pi=\sqrt{2}+1$

7 α，β，γ は鋭角とする。$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ のとき，$\alpha+\beta+\gamma$ の値を求めよ。

解説

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+5}{1-2\cdot 5}=-\frac{7}{9}$ であるから

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan\{(\alpha+\beta)+\gamma\}=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}$$
$$=\frac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot 8}=1$$

α，β，γ は鋭角であるから　$0<\alpha+\beta+\gamma<\frac{3}{2}\pi$

よって，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ から　$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$

一方，$\tan\alpha=2>1$ より，$\alpha>\frac{\pi}{4}$ であるから　$\alpha+\beta+\gamma>\frac{\pi}{4}$

したがって　$\alpha+\beta+\gamma=\frac{5}{4}\pi$

8 次の等式を証明せよ。

(1) $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta$

(2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

解説

(1) 左辺 $=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\times(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta$
$\quad-\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta$

$=\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)-\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$=\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta=$ 右辺

したがって

$\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta$

(2) 左辺 $=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\times(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta-\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha=$ 右辺

したがって

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

9 自己評価５～１で記入。５を最高評価とする。

（１）計画的に取り組めた。

（２）興味を持って取り組めた。