練習 8　次の計算をせよ。

練習 14　次の２つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(x,\ -3)$

$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるには，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があればよい。

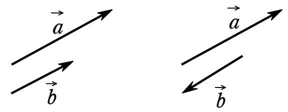
$(x,\ -3)=k(-2,\ 1)$ から

$(x,\ -3)=(-2k,\ k)$

$x=-2k,\ -3=k$

よって，$k=-3$ より

$x=(-2)\times(-3)=6$



(2)　$\vec{a}=(2,\ x)$，$\vec{b}=(3,\ 6)$　（$\vec{a}=k\vec{b}$ とするのは $\vec{b}$ の成分に x を含まないから）

$\vec{a}/\!/\vec{b}$ であるには，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k があればよい。

$(2,\ x)=k(3,\ 6)$ から

$(2,\ x)=(3k,\ 6k)$

$2=3k,\ x=6k$

よって，$k=\dfrac{2}{3}$ より

$x=6\times\dfrac{2}{3}=4$

別解）$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があればよい。

$(3,\ 6)=k(2,\ x)$

$(3,\ 6)=(2k,\ kx)$

$3=2k,\ 6=kx$ よって，$k=\dfrac{3}{2}$ より

$6=\dfrac{3}{2}x$　$x=6\times\dfrac{2}{3}=4$

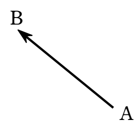
練習 15　次の２点 A，B について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

(1)　A(5, 2)，B(1, 6)

$\overrightarrow{AB}$  始点のAの成分を引く

$\overrightarrow{AB}=(1-5,\ 6-2)=(-4,\ 4)$

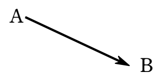
$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$



(2)　A(−3, 4)，B(2, 0)

$\overrightarrow{AB}=(2-(-3),\ 0-4)=(5,\ -4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$



練習 16　4点 A(1, 1)，B(4, 0)，C(5, 2)，D$(x,\ y)$ を頂点とする次の四角形が平行四辺形になるように，x，y の値を定めよ。

(1)　四角形 ABCD

四角形 ABCD が平行四辺形になるためには

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ であればよい。

$\overrightarrow{AD}=(x-1,\ y-1)$，

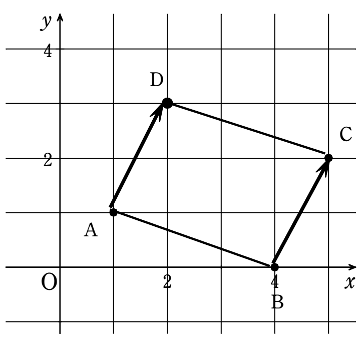
$\overrightarrow{BC}=(5-4,\ 2-0)=(\ 1\ ,\ 2)$

であるから

$(x-1,\ y-1)=(\ 1,\ 2)$

よって　　$x-1=1,\ y-1=2$

したがって　　$x=2,\ y=3$



(2)　四角形 ACBD

四角形 ACBD が平行四辺形になるためには，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ であればよい。

$\overrightarrow{AD}=(x-1,\ y-1)$，

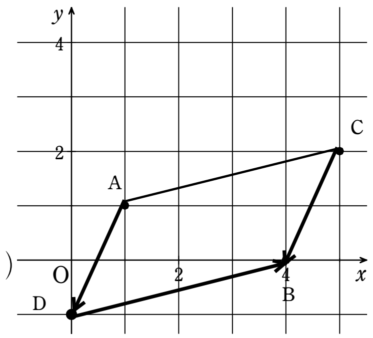
$\overrightarrow{CB}=(4-5,\ 0-2)=(\ -1\ ,\ -2\ )$

であるから

$(x-1,\ y-1)=(-1,\ -2)$

よって　　$x-1=-1,\ y-1=-2$

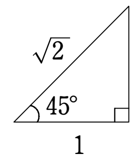
したがって　　$x=0,\ y=-1$



練習 17　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\theta=45°$

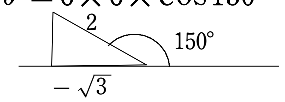
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=4\times3\times\cos45°=4\times3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}$



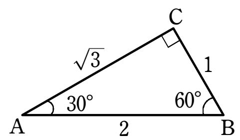
$=12\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$

(2)　$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=150°$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=6\times6\times\cos150°$

$=6\times6\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-18\sqrt{3}$



練習 18　右の図の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。



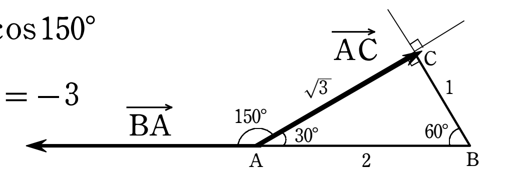
(1)　$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BA}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は 150° であるから

（始点を合わせて考える）

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{AC}|\cos150°$

$=2\times\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3$



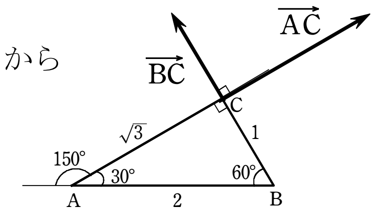
(2)　$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 90° であるから

（始点を合わせて考える）

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos90°$

$=\sqrt{3}\times1\times0=0$



練習19　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ 5)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+5\times(-2)$

$=6-10=-4$

(2)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times3$

$=\sqrt{3}+3\sqrt{3}\ =4\sqrt{3}$

(3)　$\vec{a}=(3,\ \sqrt{6})$，$\vec{b}=(2,\ -\sqrt{6})$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times2+\sqrt{6}\times(-\sqrt{6})=6-6=0$

練習20　次の２つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

(1)　$\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(-3,\ 1)$　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times(-3)+1\times1=-6+1=-5$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=135°$

(2)　$\vec{a}=(1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(\sqrt{3},\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times1=2\sqrt{3}$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=30°$

(3)　$\vec{a}=(3,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ 3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+(-1)\times3=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=0$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=90°$

(4)　$\vec{a}=(-4,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\times2+2\times(-1)=-10$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

よって　　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{-10}{10}=-1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=180°$

(5)　$\vec{a}=(1,\ -2)$，$\vec{b}=(3,\ -6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+(-2)\times(-6)=15$

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-6)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

よって $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{15}{\sqrt{5}\times3\sqrt{5}}=\dfrac{15}{15}=1$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　　$\theta=0°$

練習21　次の２つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。

(1)　$\vec{a}=(3,\ 6)$，$\vec{b}=(x,\ 4)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　　$3x+6\times4=0$　　$3x=-24$

$x=-8$

(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(x,\ x+2)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　　$x^2+(-1)\times(x+2)=0$

よって　　$x^2-x-2=0$　$(x+1)(x-2)=0$

$x=-1,\ 2$

練習22　次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$ に垂直で大きさが $\sqrt{10}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=(x,\ y)$ とする。　$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　すなわち　$2x+y=0$

よって　$y=-2x$　…… ①

$|\vec{b}|^2=(\sqrt{10})^2$ であるから　$x^2+y^2=10$　…… ②

① を ② に代入　$x^2+(-2x)^2=10$

$5x^2=10$　すなわち　$x=\pm\sqrt{2}$

① に代入して $x=\sqrt{2}$ のとき $y=-2\sqrt{2}$,

$x=-\sqrt{2}$ のとき $y=2\sqrt{2}$

よって　$\vec{b}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$

(2) $\vec{a}=(4,\ 3)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$\vec{e}=(x,\ y)$ とする。　$\vec{a}\perp\vec{e}$ であるから

$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　すなわち　$4x+3y=0$

よって　$y=-\dfrac{4}{3}x$　…… ①

$|\vec{e}|^2=1^2$ であるから　$x^2+y^2=1$　…… ②

① を ② に代入すると　$x^2+\left(-\dfrac{4}{3}x\right)^2=1$

整理すると　$\dfrac{25}{9}x^2=1$　すなわち　$x=\pm\dfrac{3}{5}$

① に代入して　$x=\dfrac{3}{5}$ のとき $y=-\dfrac{4}{5}$,

$x=-\dfrac{3}{5}$ のとき $y=\dfrac{4}{5}$

よって　$\vec{e}=\left(\dfrac{3}{5},\ -\dfrac{4}{5}\right),\ \left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$

練習23　$\vec{a}=(4,\ -2)$ に垂直なベクトルを1つ示せ。

$\vec{b}=(2,\ 4)$ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times2+(-2)\times4=0$

から，$\vec{b}$ は $\vec{a}$ に垂直である。よって，求めるベクトルは　$(2,\ 4)$

補充1　2点 A$(1,\ 3)$，B$(4,\ 7)$ について，$\overrightarrow{AB}$ を成分表示し，$|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。

$\overrightarrow{AB}=(4-1,\ 7-3)=(3,\ 4)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

補充2　次の2つのベクトルが平行になるように，x の値を定めよ。

(1) $\vec{a}=(5,\ -2)$，$\vec{b}=(x,\ 6)$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ になるのは，$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在するときである。

$(x,\ 6)=k(5,\ -2)$ から　$x=5k$，$6=-2k$

$k=-3$ であるから　$x=5\times(-3)=-15$

(2) $\vec{a}=(3,\ x)$，$\vec{b}=(-1,\ 2)$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}/\!/\vec{b}$ になるのは，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 k が存在するときである。　別解) $\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k があればよい。

$(3,\ x)=k(-1,\ 2)$ から

$3=-k$，$x=2k$

$k=-3$ であるから

$x=2\times(-3)=-6$

別解)

$(-1,\ 2)=k(3,\ x)$

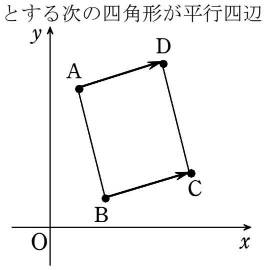
$(-1,\ 2)=(3k, kx)$

$-1=3k$，$2=kx$ よって，$k=-\dfrac{1}{3}$ より

$2=-\dfrac{1}{3}x$　$x=2\times(-3)=-6$

補充3　4点 A$(x,\ y)$，B$(2,\ 1)$，C$(5,\ 2)$，D$(4,\ 6)$ を頂点とする次の四角形が平行四辺形になるように，x，y の値を定めよ。

(1) 四角形 ABCD



四角形 ABCD が平行四辺形になるのは，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ のときであるから

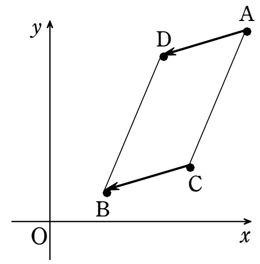
$\overrightarrow{AD}=(4-x,\ 6-y)$，$\overrightarrow{BC}=(5-2,\ 2-1)$

$(4-x,\ 6-y)=(5-2,\ 2-1)$

よって　$4-x=3$，$6-y=1$

したがって　$x=1$，$y=5$

(2) 四角形 ACBD



四角形 ACBD が平行四辺形になるのは，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ のときであるから

$\overrightarrow{AD}=(4-x,\ 6-y)$，$\overrightarrow{BC}=(2-5,\ 1-2)$

$(4-x,\ 6-y)=(2-5,\ 1-2)$

よって　$4-x=-3$，$6-y=-1$

したがって　$x=7$，$y=7$

補充4　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の場合に内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\theta=60°$

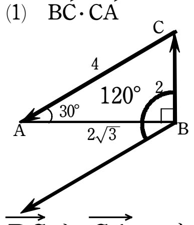
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\times6\times\cos60°=2\times6\times\dfrac{1}{2}=6$

(2) $|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=7$，$\theta=150°$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=4\times7\times\cos150°=4\times7\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-14\sqrt{3}$

補充5　図の直角三角形 ABC において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$



$\overrightarrow{BC}$ と $\overrightarrow{CA}$ のなす角は $120°$

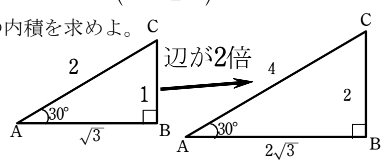
$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos120°$

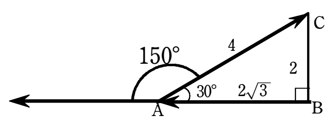
$=2\times4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-4$

(2) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$

$AB=2\sqrt{3}$，

$BC=2$





$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BA}$ のなす角は $150°$ であるから

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BA}|\cos150°$

$=4\times2\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-12$

補充6　次のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(5,\ 4)$，$\vec{b}=(1,\ -2)$　　(2) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ 6)$

(3) $\vec{a}=(4,\ \sqrt{2})$，$\vec{b}=(-1,\ \sqrt{2})$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\times1+4\times(-2)=-3$　(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+3\times6=20$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4\times(-1)+\sqrt{2}\times\sqrt{2}=-2$

補充7　次の2つのベクトルのなす角 θ を求めよ。

(1) $\vec{a}=(2,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 6)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times2+1\times6=10$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$　　$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{10}{\sqrt{5}\times2\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=45°$

(2) $\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1)$，$\vec{b}=(-\sqrt{3},\ 1)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+1\times1=-2$

$|\vec{a}|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$　　$|\vec{b}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-2}{2\times2}=-\dfrac{1}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ であるから　$\theta=120°$

補充8　次の2つのベクトルが垂直になるように，x の値を定めよ。

$\vec{a}=(6,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ x)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より　$6\times3+2x=0$　$2x=-18$　よって　$x=-9$

補充9　$\vec{a}=(4,\ -8)$ に垂直で大きさが $\sqrt{5}$ のベクトル $\vec{b}$ を求めよ。

$\vec{b}=(x,\ y)$ とする。$\vec{a}\perp\vec{b}$ であるから　$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$　すなわち

$4x-8y=0$

よって　$x=2y$ …… ①

$|\vec{b}|^2=(\sqrt{5})^2$ であるから　$x^2+y^2=5$ …… ②

① を ② に代入すると　$(2y)^2+y^2=5$

整理すると　$5y^2=5$　すなわち　$y=\pm1$

① に代入して　$y=1$ のとき　$x=2$

$y=-1$ のとき　$x=-2$

したがって　$\vec{b}=(2,\ 1),\ (-2,\ -1)$

今までの学習課題に対する取り組みについて5段階で自己評価しなさい。　(　　　)

今までの学習課題に対する理解度について5段階で自己評価しなさい。　(　　　)

不十分1　やや不十分2　ある程度と取り組めた3　ほぼ十分4　十分5