1 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

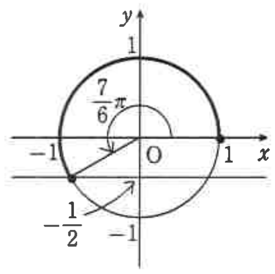
(1) $y=\sin\theta+3\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi\right)$　　(2) $y=2\cos\theta-1\quad\left(\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi\right)$

(3) $y=-\tan\theta+1\quad\left(-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$

解説

(1) $0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi$ であるから，右の図より

$$-\frac{1}{2}\leqq\sin\theta\leqq1$$



したがって

$$\frac{5}{2}\leqq\sin\theta+3\leqq4$$

また，$0\leqq\theta\leqq\frac{7}{6}\pi$ であるから

$\sin\theta=1$ のとき　　$\theta=\frac{\pi}{2}$

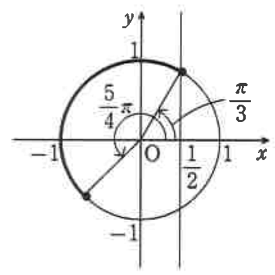
$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ のとき　　$\theta=\frac{7}{6}\pi$

よって

$\theta=\frac{\pi}{2}$ で最大値 4，$\theta=\frac{7}{6}\pi$ で最小値 $\frac{5}{2}$

(2) $\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから，右の図より

$$-1\leqq\cos\theta\leqq\frac{1}{2}$$



したがって

$$-2\leqq2\cos\theta\leqq1$$

ゆえに　　$-3\leqq2\cos\theta-1\leqq0$

また，$\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{5}{4}\pi$ であるから

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ のとき　　$\theta=\frac{\pi}{3}$

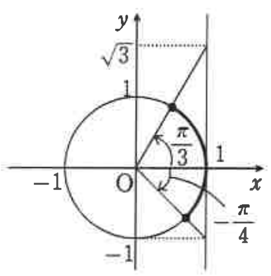
$\cos\theta=-1$ のとき　　$\theta=\pi$

よって

$\theta=\frac{\pi}{3}$ で最大値 0，$\theta=\pi$ で最小値 -3

(3) $-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であるから，右の図より

$$-1\leqq\tan\theta\leqq\sqrt{3}$$



したがって

$$-\sqrt{3}\leqq-\tan\theta\leqq1$$

ゆえに

$$1-\sqrt{3}\leqq-\tan\theta+1\leqq2$$

また，$-\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ であるから

$\tan\theta=-1$ のとき　　$\theta=-\frac{\pi}{4}$

$\tan\theta=\sqrt{3}$ のとき　　$\theta=\frac{\pi}{3}$

よって

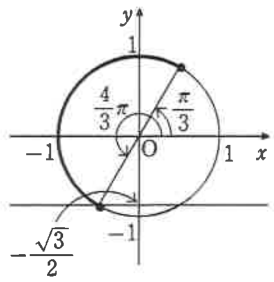
$\theta=-\frac{\pi}{4}$ で最大値 2，$\theta=\frac{\pi}{3}$ で最小値 $1-\sqrt{3}$

2 次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$　　(2) $y=\tan\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}\right)$

解説

(1) $\theta+\frac{\pi}{3}=t$ とおくと　　$y=\sin t$



$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき　　$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4}{3}\pi$

すなわち　　$\frac{\pi}{3}\leqq t\leqq\frac{4}{3}\pi$　…… ①

① の範囲において，$y=\sin t$ は

$t=\frac{\pi}{2}$ で最大値 1，

$t=\frac{4}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

をとる。

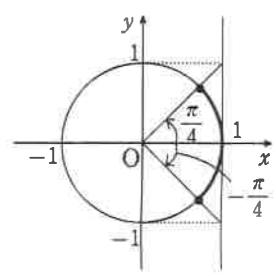
$\theta=t-\frac{\pi}{3}$ であるから，

$t=\frac{\pi}{2}$ のとき　$\theta=\frac{\pi}{6}$

$t=\frac{4}{3}\pi$ のとき　$\theta=\pi$

したがって　　$\theta=\frac{\pi}{6}$ で最大値 1，$\theta=\pi$ で最小値 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $2\theta-\frac{\pi}{4}=t$ とおくと　　$y=\tan t$



$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$0\leqq2\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから

$$-\frac{\pi}{4}\leqq2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq\frac{\pi}{4}$$

すなわち　　$-\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{\pi}{4}$　…… ①

① の範囲において，$y=\tan t$ は

$t=\frac{\pi}{4}$ で最大値 1，

$t=-\frac{\pi}{4}$ で最小値 -1

をとる。

$2\theta-\frac{\pi}{4}=t$ より，$\theta=\frac{t}{2}+\frac{\pi}{8}$ であるから，

$t=\frac{\pi}{4}$ のとき　　$\theta=\frac{\pi}{4}$

$t=-\frac{\pi}{4}$ のとき　$\theta=0$

したがって　　$\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値 1，$\theta=0$ で最小値 -1

在宅教育　確認プリント３　３年生　解法数学ⅡＢ　課題⑤⑥の後に解答　　３年６組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

3 $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の関数の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(1) $y=\sin^2\theta+4\sin\theta-1$　　(2) $y=2\sin^2\theta+2\cos\theta+4$

解説

(1) $\sin\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$ …… ①

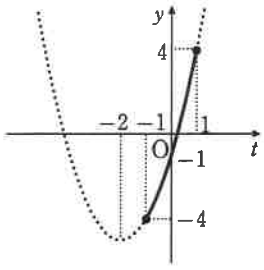
y を t で表すと　$y=t^2+4t-1=(t+2)^2-5$

よって，① の範囲において y は，

$t=1$ で最大値 4，

$t=-1$ で最小値 -4

をとる。



また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

$t=1$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$t=-1$ のとき　$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ で最大値 4，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$ で最小値 -4

(2) $y=2(1-\cos^2\theta)+2\cos\theta+4=-2\cos^2\theta+2\cos\theta+6$

$\cos\theta=t$ とおくと，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　$-1\leqq t\leqq 1$ …… ①

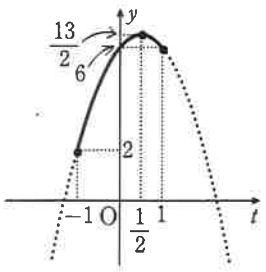
y を t で表すと　$y=-2t^2+2t+6=-2\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{2}$

よって，① の範囲において y は，

$t=\dfrac{1}{2}$ で最大値 $\dfrac{13}{2}$，

$t=-1$ で最小値 2

をとる。



また，$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$，

$t=-1$ のとき　$\theta=\pi$

よって　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$ で最大値 $\dfrac{13}{2}$，$\theta=\pi$ で最小値 2

4 加法定理を書け。

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

(3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

(4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(5) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(6) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

解説

5 加法定理を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin 105^\circ$　(2) $\cos 105^\circ$　(3) $\tan 165^\circ$

(4) $\sin 15^\circ$　(5) $\cos\dfrac{5}{12}\pi$　(6) $\tan\dfrac{7}{12}\pi$

解説

(1) $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

(3) $\tan 165^\circ=\tan(120^\circ+45^\circ)=\dfrac{\tan 120^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 120^\circ\tan 45^\circ}$

$=\dfrac{-\sqrt{3}+1}{1-(-\sqrt{3})\cdot 1}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{(1-\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{-2}$

$=-2+\sqrt{3}$

(4) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos\dfrac{5}{12}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(6) $\tan\dfrac{7}{12}\pi=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{3}+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\dfrac{\pi}{3}\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$

$=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-2-\sqrt{3}$

6 α の動径が第 1 象限，β の動径が第 3 象限にあり，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin(\alpha+\beta)$ と $\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

解説

α の動径が第 1 象限にあるから　$\cos\alpha>0$

β の動径が第 3 象限にあるから　$\sin\beta<0$

よって　$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2}=-\dfrac{5}{13}$

したがって

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{56}{65}$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)+\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{63}{65}$

7 $\tan\alpha=2$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan(\alpha-\beta)$ の値を求めよ。

さらに，$0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\alpha-\beta$ の値を求めよ。

解説

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{1+2\cdot\dfrac{1}{3}}=1$

$\tan(\alpha-\beta)=1$ であるから，$0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$

8 自己評価５～１で記入。５を最高評価とする。

（１）計画的に取り組めた。□

（２）興味を持って取り組めた。□