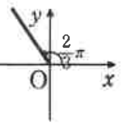
1 座標平面上で，x 軸の正の部分を始線にとる。次の角の動径は，第何象限にあるか。

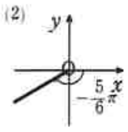
(1) $\frac{2}{3}\pi$　(2) $-\frac{5}{6}\pi$　(3) $\frac{7}{3}\pi$　(4) $-\frac{25}{4}\pi$

解説

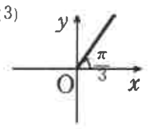
(1) 図から　第２象限



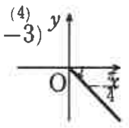
(2) 図から　第３象限



(3) $\frac{7}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2\pi$
図から　第１象限



(4) $-\frac{25}{4}\pi=-\frac{\pi}{4}+2\pi\times(-3)$
図から　第４象限



2 次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径６，中心角 $\frac{\pi}{4}$　(2) 半径８，中心角 $\frac{5}{6}\pi$

解説

(1) $l=6\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$，$S=\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$　別解　$S=\frac{1}{2}l\cdot6=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\pi\cdot6=\frac{9}{2}\pi$

(2) $l=8\cdot\frac{5}{6}\pi=\frac{20}{3}\pi$，$S=\frac{1}{2}\cdot8^2\cdot\frac{5}{6}\pi=\frac{80}{3}\pi$　別解　$S=\frac{1}{2}l\cdot8=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{3}\pi\cdot8$
$=\frac{80}{3}\pi$

3 半径 4 cm，弧の長さ 7 cm の扇形の中心角は何ラジアンか。また，この扇形の面積を求めよ。

解説

中心角を θ ラジアンとすると，条件から　$7=4\cdot\theta$　よって　$\theta=\frac{7}{4}$（ラジアン）

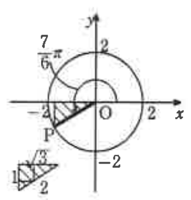
扇形の面積は $\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\theta=\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{7}{4}=14$ (cm²)　別解 扇形の面積は　$\frac{1}{2}\cdot7\cdot4=14$

4 次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $\theta=\frac{7}{6}\pi$　(2) $\theta=\frac{5}{3}\pi$　(3) $\theta=-\frac{3}{4}\pi$　(4) $\theta=\frac{7}{2}\pi$

解説

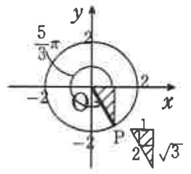
(1) $\frac{7}{6}\pi$ の動径と原点を中心とする半径２の円との交点をＰとすると，Ｐの座標は
$(-\sqrt{3},\ -1)$　したがって



$\sin\frac{7}{6}\pi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$　$\cos\frac{7}{6}\pi=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

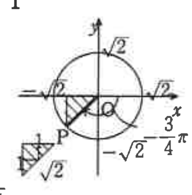
$\tan\frac{7}{6}\pi=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $\frac{5}{3}\pi$ の動径と原点を中心とする半径２の円との交点をＰとすると，Ｐの座標は
$(1,\ -\sqrt{3})$　したがって



$\sin\frac{5}{3}\pi=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$　$\cos\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{2}$　$\tan\frac{5}{3}\pi=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$

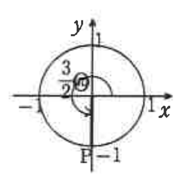
(3) $-\frac{3}{4}\pi$ の動径と原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円との交点をＰとすると，Ｐの座標は
$(-1,\ -1)$　したがって



$\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{-1}{-1}=1$

(4) $\frac{7}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi+2\pi$



$\frac{7}{2}\pi$ の動径と原点を中心とする半径１の円との交点をＰとすると，Ｐの座標は　$(0,\ -1)$　したがって

$\sin\frac{7}{2}\pi=\frac{-1}{1}=-1$　$\cos\frac{7}{2}\pi=\frac{0}{1}=0$　$\tan\frac{7}{2}\pi$ は定義されない

5 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ のうち，１つが次の値をとるとき，他の２つの値を求めよ。ただし，[ ]内は θ の動径が含まれる象限を表す。

(1) $\sin\theta=\frac{3}{4}$ [第２象限]　(2) $\sin\theta=-\frac{12}{13}$ [第３象限]

(3) $\cos\theta=\frac{4}{5}$ [第４象限]　(4) $\tan\theta=-\sqrt{7}$ [第４象限]

解説

(1) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

θ の動径が第２象限にあるとき，$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=-\sqrt{\frac{7}{16}}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$　また

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{4}\div\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{\sqrt{7}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{7}}$

(2) $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2=\frac{25}{169}$

θ の動径が第３象限にあるとき，$\cos\theta<0$ であるから

$\cos\theta=-\sqrt{\frac{25}{169}}=-\frac{5}{13}$　また

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{12}{13}\right)\div\left(-\frac{5}{13}\right)=\left(-\frac{12}{13}\right)\times\left(-\frac{13}{5}\right)=\frac{12}{5}$

(3) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

θ の動径が第４象限にあるとき，$\sin\theta<0$ であるから

$\sin\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$　また

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{3}{5}\right)\div\frac{4}{5}=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{4}=-\frac{3}{4}$

(4) $\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+(-\sqrt{7})^2}=\frac{1}{8}$

θ の動径が第４象限にあるとき，$\cos\theta>0$ であるから

$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$　また

$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=(-\sqrt{7})\times\frac{\sqrt{2}}{4}=-\frac{\sqrt{14}}{4}$

6 (1) $\tan\theta=-\frac{1}{2}$，$\pi<\theta<2\pi$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $\cos\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解説

(1) $\tan\theta<0$ であるから，θ の動径は第２象限または第４象限にある。
これと $\pi<\theta<2\pi$ から，θ の動径は第４象限にある。

よって　$\cos\theta>0$　$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\cos\theta>0$ であるから　$\cos\theta=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

(2) $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$　よって　$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\div\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times(-3)=-2\sqrt{2}$

$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\div\left(-\frac{1}{3}\right)$
$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times(-3)=2\sqrt{2}$

以上から　$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=-2\sqrt{2}$

または　$\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta=2\sqrt{2}$

7 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$

解説

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を２乗すると

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$　よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}+\dfrac{3\sqrt{3}}{16}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

別解　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right\}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{9}{8}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

(3) $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1}{-\frac{1}{8}}=-8$

8 $\sin\theta=3\cos\theta$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

解説

$\sin\theta=3\cos\theta$ ……① とする。

$\cos\theta=0$ とすると，①から　$\sin\theta=0$

これは，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に矛盾する。よって　$\cos\theta\neq0$

①の両辺を $\cos\theta\ (\neq0)$ で割ると　$\tan\theta=3$

ゆえに　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+3^2}=\dfrac{1}{10}$

よって　$\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{10}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

①から，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ のとき　$\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

したがって　$\sin\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta=3$

または　$\sin\theta=-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}$，$\tan\theta=3$

別解　($\cos\theta$ の求め方)

①を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると　$9\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$

よって　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{10}$　ゆえに　$\cos\theta=\pm\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

9 (1) $\tan\theta=2$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$(\sin\theta+\cos\theta)^2$ の値を求めよ。

解説

(1) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$ ……①

ここで　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+2^2}=\dfrac{1}{5}$

よって，①から　$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=2\div\dfrac{1}{5}=10$

(2) $\tan\theta=\dfrac{1}{3}$ から　$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}$　よって　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}\cos\theta$　したがって

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\dfrac{1}{3}\cos\theta+\cos\theta\right)^2=\left(\dfrac{4}{3}\cos\theta\right)^2=\dfrac{16}{9}\cos^2\theta$ ……①

ここで　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{9}{10}$

よって，①から　$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{9}{10}=\dfrac{8}{5}$

10 $\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ とする。

(1) $\sin\theta-\cos\theta$　　(2) $\sin\theta+\cos\theta$　　(3) $\sin\theta$，$\cos\theta$

解説

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ から　$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$

(1) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{3}$

$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ より，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ ……①

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\sin\theta\cos\theta=1+2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\sin\theta+\cos\theta=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) (2)から

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……②　または　$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ……③

②のとき，①，②を連立して解くと

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$

③のとき，①，③を連立して解くと

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$

したがって

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$

または

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{6}$，$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$

11 次の等式を証明せよ。

(1) $\sin^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^4\theta=\cos^2\theta$

(2) $\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

解説

(1) 左辺$=\sin^2\theta+\left(1-\dfrac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\right)\cos^4\theta=\sin^2\theta+\cos^4\theta-\sin^4\theta$

$=\sin^2\theta+\cos^4\theta-(\sin^2\theta)^2=(1-\cos^2\theta)+\cos^4\theta-(1-\cos^2\theta)^2$

$=1-\cos^2\theta+\cos^4\theta-(1-2\cos^2\theta+\cos^4\theta)=\cos^2\theta=$右辺

したがって　$\sin^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^4\theta=\cos^2\theta$

別解　左辺$=\sin^2\theta+\left(1-\dfrac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}\right)\cos^4\theta=\sin^2\theta+\cos^4\theta-\sin^4\theta$

$=(1-\cos^2\theta)+(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=1-\cos^2\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta=$右辺

したがって　$\sin^2\theta+(1-\tan^4\theta)\cos^4\theta=\cos^2\theta$

(2) 右辺$=\dfrac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\dfrac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\dfrac{(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}$

$=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=$左辺

したがって　$\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$

12 自己評価５～１で記入。５を最高評価とする。

（１）計画的に取り組めた。□

（２）興味を持って取り組めた。□