

1. 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)^3$

$$= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

(2) $(x-1)^3$

$$= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 - 1^3$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

(3) $(3a+b)^3$

$$= (3a)^3 + 3 \cdot (3a)^2 \cdot b + 3 \cdot (3a) \cdot b^2 + b^3$$

$$= 27a^3 + 27a^2b + 9ab^2 + b^3$$

(4) $(x-2y)^3$

$$= x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot (-2y) + 3 \cdot x \cdot (2y)^2 - (2y)^3$$

$$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$$

2. 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$

$$= (x+2)(x^2 - x \cdot 2 + 2^2)$$

$$= x^3 + 2^3 = x^3 + 8$$

(2) $(x-3)(x^2+3x+9)$

$$= (x-3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2)$$

$$= x^3 - 3^3 = x^3 - 27$$

(3) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

$$= (x+3y)(x^2 - x \cdot 3y + (3y)^2)$$

$$= x^3 + (3y)^3 = x^3 + 27y^3$$

(4) $(2x-a)(4x^2+2ax+a^2)$

$$= (2x-a)((2x)^2 + 2x \cdot a + a^2)$$

$$= (2x)^3 - a^3 = 8x^3 - a^3$$

3. 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3+27

$$= x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - x \cdot 3 + 3^2)$$

$$= (x+3)(x^2 - 3x + 9)$$

(2) x^3-1

$$= x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x \cdot 1 + 1^2)$$

$$= (x-1)(x^2 + x + 1)$$

(3) $125x^3+a^3$

$$= (5x)^3 + a^3 = (5x+a)((5x)^2 - 5x \cdot a + a^2)$$

$$= (5x+a)(25x^2 - 5ax + a^2)$$

(4) $64x^3-y^3$

$$= (4x)^3 - y^3 = (4x-y)((4x)^2 + 4x \cdot y + y^2)$$

$$= (4x-y)(16x^2 + 4xy + y^2)$$

4. 次の式を因数分解せよ。

(1) x^6-64

$$= (x^3)^2 - 8^2 = (x^3+8)(x^3-8)$$

$$= (x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$$

$$= (x+2)(x-2)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)$$

(2) x^6-y^6

$$= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3+y^3)(x^3-y^3)$$

$$= (x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$= (x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

5. パスカルの三角形を使って、 $(a+b)^6$ の展開式を求めよ。

パスカルの三角形

	1	1					
	1	2	1				
	1	3	3	1			
	1	4	6	4	1		
	1	5	10	10	5	1	
	1	6	15	20	15	6	1

$$(a+1)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

6. 次の整式 A, B について, A を B で割った商と余りを求めよ。

(1) $A = 3x^2 + 5x + 4, B = x + 2$

$$\begin{array}{r} 3x-1 \\ x+2 \overline{) 3x^2+5x+4} \\ \underline{3x^2+6x} \\ -x+4 \\ \underline{-x-2} \\ 6 \end{array}$$

商 $3x-1$, 余り 6

(2) $A = x^3 - 4x^2 - 5, B = x - 3$

$$\begin{array}{r} x^2-x-3 \\ x-3 \overline{) x^3-4x^2-5} \\ \underline{x^3-3x^2} \\ -x^2-5 \\ \underline{-x^2+3x} \\ -3x-5 \\ \underline{-3x+9} \\ -14 \end{array}$$

商 x^2-x-3 , 余り -14

(3) $A = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4, B = x^2 - x + 2$

$$\begin{array}{r} 2x+7 \\ x^2-x+2 \overline{) 2x^3+5x^2-2x+4} \\ \underline{2x^3-2x^2+4x} \\ 7x^2-6x+4 \\ \underline{7x^2-7x+14} \\ x-10 \end{array}$$

商 $2x+7$, 余り $x-10$

(4) $A = x^3 - 7x + 6, B = x^2 - 3 + 2x$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ x^2+2x-3 \overline{) x^3-7x+6} \\ \underline{x^3+2x^2-3x} \\ -2x^2-4x+6 \\ \underline{-2x^2-4x+6} \\ 0 \end{array}$$

商 $x-2$, 余り 0

7. 次の条件を満たす整式 A を求めよ。

(1) A を $x+2$ で割ると, 商が $x+3$, 余りが -1

次の等式が成り立つ。

$$A = (x+2)(x+3) - 1$$

右辺を計算して

$$A = (x^2 + 5x + 6) - 1 = x^2 + 5x + 5$$

(2) A を $x^2 + 2x + 3$ で割ると, 商が $x-1$, 余りが $2x+3$

次の等式が成り立つ。

$$A = (x^2 + 2x + 3)(x-1) + (2x+3)$$

右辺を計算して

$$A = (x^3 + x^2 + x - 3) + 2x + 3 = x^3 + x^2 + 3x$$

8. 次の条件を満たす整式 B を求めよ。

(1) $3x^2 - 4x + 5$ を B で割ると, 商が $x-1$, 余りが 4

次の等式が成り立つ。

$$3x^2 - 4x + 5 = B \times (x-1) + 4$$

整理すると $3x^2 - 4x + 1 = B \times (x-1)$

よって, $3x^2 - 4x + 1$ は $x-1$ で割り切れて,

その商が B である。

$$\begin{array}{r} 3x-1 \\ x-1 \overline{) 3x^2-4x+1} \\ \underline{3x^2-3x} \\ -x+1 \\ \underline{-x+1} \\ 0 \end{array}$$

したがって $B = 3x - 1$

(2) $x^3 - 2x^2 + 3x - 3$ を B で割ると, 商が $x-2$, 余りが $-2x+7$

次の等式が成り立つ。

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = B \times (x-2) + (-2x+7)$$

整理すると $x^3 - 2x^2 + 5x - 10 = B \times (x-2)$

よって, $x^3 - 2x^2 + 5x - 10$ は $x-2$ で割り切れて,

その商が B である。

したがって $B = x^2 + 5$

$$\begin{array}{r} x^2+5 \\ x-2 \overline{) x^3-2x^2+5x-10} \\ \underline{x^3-2x^2} \\ 5x-10 \\ \underline{5x-10} \\ 0 \end{array}$$

9. 次の分数式を約分せよ。

(1) $\frac{15ab^4}{6a^3b^2}$

$$= \frac{3ab^2 \cdot 5b^2}{3ab^2 \cdot 2a^2} = \frac{5b^2}{2a^2}$$

(2) $\frac{x^2-9}{x^2+7x+12}$

$$= \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+4)} = \frac{x-3}{x+4}$$

(3) $\frac{x^2-2x-3}{2x^2-7x+3}$

$$= \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(2x-1)} = \frac{x+1}{2x-1}$$

10. 次の式を計算せよ。

(1) $\frac{x^2-4}{x^2-3x} \times \frac{x}{x+2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+2)(x-2) \times x}{x(x-3) \times (x+2)} \\ &= \frac{x-2}{x-3} \end{aligned}$$

(2) $\frac{2x}{2x+1} \times \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x}{2x+1} \times \frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} \\ &= 2x \end{aligned}$$

(3) $\frac{x-2}{x^2+3x} \div \frac{x^2-3x}{x^2-9}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-2)}{x(x+3)} \times \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} \\ &= \frac{x-2}{x^2} \end{aligned}$$

(4) $\frac{x^2-x}{x-3} \div \frac{x^2+5x}{x^2+2x-15}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x(x-1)}{(x-3)} \times \frac{(x+5)(x-3)}{x(x+5)} \\ &= x-1 \end{aligned}$$

11. 次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x-1}$$

$$= \frac{x+2}{x-1}$$

$$(2) \frac{2x}{x+3} + \frac{x+9}{x+3}$$

$$= \frac{2x+(x+9)}{x+3}$$

$$= \frac{3x+9}{x+3} = \frac{3(x+3)}{x+3} = 3$$

$$(3) \frac{3x+1}{x-2} - \frac{2x-3}{x-2}$$

$$= \frac{(3x+1)-(2x-3)}{x-2} = \frac{x+4}{x-2}$$

$$(4) \frac{2x^2}{x-1} - \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{2x^2-(x+1)}{x-1} = \frac{2x^2-x-1}{x-1}$$

$$= \frac{(2x+1)(x-1)}{x-1} = 2x+1$$

12. 次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2}$$

$$= \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(2x-4)+(3x+3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{5x-1}{(x+1)(x-2)}$$

$$(2) \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}$$

$$= \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{x^2-1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x}$$

$$(3) \frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$$

$$= \frac{x}{x+1} + \frac{3x-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{x(x-3)+3x-1}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-1}{(x+1)(x-3)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-1}{x-3}$$

$$(4) \frac{3x+5}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$$

$$= \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x(3x+5)-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(3x^2+5x)-(x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x^2+4x+1}{x(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(3x+1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{3x+1}{x(x-1)}$$

13. 次の等式のうち、 x についての恒等式はどれか。

(1) $(x+1)(x-1) = x^2-1$

(2) $x(x-1) + x = 2x$

(3) $2 + \frac{1}{x+1} = \frac{3}{x+1}$

(4) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{x(x+2)}$

(1) 左辺 = x^2-1 = 右辺

(2) 左辺 = $x^2-x+x = x^2$ ≠ 右辺

(3) 左辺 = $\frac{2(x+1)+1}{x+1} = \frac{2x+3}{x+1}$ ≠ 右辺

(4) 左辺 = $\frac{(x+2)-x}{x(x+2)} = \frac{2}{x(x+2)}$ = 右辺

以上から、 x についての恒等式であるのは (1)、(4)

14. 等式 $2x^2-7x+8=(x-3)(ax+b)+c$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

等式の右辺を x について整理すると

$$2x^2-7x+8 = ax^2 + (-3a+b)x + (-3b+c)$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$2 = a, -7 = -3a + b, 8 = -3b + c$$

これを解いて $a=2, b=-1, c=5$

15. 等式 $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b の値を定めよ。

等式の両辺に $x(x+1)$ を掛けて得られる等式

$$1 = a(x+1) + bx$$

が恒等式であればよい。

右辺を x について整理すると

$$1 = (a+b)x + a$$

両辺の同じ次数の項の係数を比較して

$$0 = a+b, 1 = a$$

これを解いて $a=1, b=-1$