mod を用いたコラッツ予想の性質

― 3 を法として 2^{6t} の数の規則性を調べる ―

高橋侑里，石川諒
Yuri Takahashi, Ryo Ishikawa
奈良女子大学附属中等教育学校
【キーワード】数論，数列，規則

1．はじめに

数学の未解決問題を調べている中で、コラッツ予想というものがあるのを知った。コラッツ予想とは、自然数 n に対して、

・n が偶数なら、n を 2 で割る
・n が奇数なら、n を 3 倍して 1 を足す

という操作を考える。この操作が、「どのような初期値から始めても、有限回の操作で必ず 1 に達する」という予想である。

そして、四則演算のみで定式化されているという点や一見単純そうに見えるのに、今も未解決であることに興味を持ち、この研究を始めた。

2．目的

2^n の数のコラッツ操作を逆から行い、3 を法として数を調べていく中で 2^{6t}（$t \in$□）の数に法則を見つけた。

3．方法

まず、2^6 についてコラッツ予想の操作の逆の操作を考える。次に $2^{6t}=64^t$ より、逆算を行って 64^t-1 が 9 の倍数であることを示す。

4．結果

$2^6=64$ について、逆操作を行うと、

$$64 \to 21 \Rightarrow 42 \Rightarrow 84 \Rightarrow 168 \Rightarrow \cdots$$

となり、→は 1 を引いてから 3 で割る操作、⇒は 2 倍する操作を表している。ここで、21 以降は 3 で割り切れるため、2 倍のみの操作となり、出現を絞ることができる。

また、$2^{6t}=64^t$ については逆算を行って $\dfrac{64^t-1}{3}$ が 3 の倍数、つまり 64^t-1 が 9 の倍数であることを示せればよいのでこれを示した。以下の式はその計算過程である。

$$\begin{aligned}
&64^t-1\\
&\quad=4^{3t}-1\\
&\quad=(4^t-1)(4^{2t}+4^t+1)
\end{aligned}$$

ここで、$4^t \equiv 1 \pmod 3$ より、$4^t-1\equiv 0$. ゆえに、4^t-1 は 3 の倍数である。

一方、$4^{2t}=16^t\equiv 1,\ 4^t\equiv 1 \pmod 3$ なので、$4^{2t}+4^t+1\equiv 0 \pmod 3$ である。つまり、$4^{2t}+4^t+1\equiv 0$ も 3 の倍数である。

よって、64^t-1 は 9 で割り切れる。

5．まとめ

今回は 2^{6t} の場合の規則性を見つけることができた。今後の研究では、他の倍数の規則性やステップ数の規則性についても見ていきたいと考えている。

謝辞

本研究にあたり協力してくださいました中村一葉さん、小川翼さん、熱心なご指導を頂いた顧問の川口慎二教論に感謝の意を表します。

参考文献

https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B3%E3%83%A9%E3%83%83%E3%83%84%E3%81%AE%E5%95%8F%E9%A1%8C