

# modを用いたコラッツ予想の性質

奈良女子大学附属中等教育学校4年 高橋 侑里 石川 諒

要旨: mod 3として、 $2^{6t}$ の数の規則性を調べる。

## 1. 研究の背景と目的

### ・背景

数学の未解決問題を調べている中で、コラッツ予想というものがあるのを知った。そして、四則演算のみで定式化されているという点や一見単純そうに見えるのに80年間も未解決であることに興味を持った。

### ・目的

$2^n$ の数のコラッツ操作を逆から行い、mod 3を法として数を調べていく中で $2^{6t}$ の数の法則を見つけた。(  $t \in \mathbb{N}$  )

## 2. コラッツ予想とは

$n \in \mathbb{N}$ とする

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \equiv 0 \pmod{2} \\ 3n+1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

別の言葉で表現すると、任意の自然数  $n$  をスタートし

① 奇数ならば 3倍して1を足す …①

② 偶数ならば 2で割る …②

ことを繰り返すと、いずれ必ず1になる。

ex)  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

② ① ② ① ② ② ② ②

## 3. mod 3を法としたコラッツ予想

まず、 $2^6$ についてコラッツ予想の操作の逆の操作を考える。

$$2^6 = 64 \Rightarrow 21 \Rightarrow 42 \Rightarrow 84 \dots$$

↑1回目の $3n+1$ の逆算操作である「-1して÷3」を行うから、以降の数はmod 3を法としたときに $21 \equiv 0, 42 \equiv 0, 84 \equiv 0 \dots$ となり、×2の操作しかすることができない。

このことより、

$$2^6 \text{の数は、} 21 \times 2^x \quad (x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x)$$

$$2^y \quad (y \in \mathbb{N}, 6 \leq y)$$

のいずれかからのみ出現するとわかる。

次に $2^{6t} = 64^t$ より、逆算操作を行って $(64^t - 1)/3$ が3の倍数、つまり $64^t - 1$ が9の倍数であることを示す。

$$64^t - 1 = (8^t + 1)(8^t - 1)$$

$$= (2^t + 1)(4^t - 2^t + 1)(2^t - 1)(4^t + 2^t + 1)$$

ここで $4^t + 1 = A$ とすると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (2^t + 1)(A - 2^t)(2^t - 1)(A + 2^t) \\ &= (4^t - 1)(A^2 - 4^t) \\ &= (4^t - 1)\{(4^t + 1)^2 - 4^t\} \\ &= (4^t - 1)\{4^{2t} + 8^t + 1 - 4^t\} \\ &= (4^t - 1)(4^{2t} + 4^t + 1) \\ &= (4^t - 1)(16^t + 4^t + 1) \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

$4^t \equiv 1 \pmod{3}$ より

$$4^t - 1 \equiv 0 \dots \textcircled{1}$$

また、 $4^t \equiv 1, 16^t \equiv 1, 1 \equiv 1 \pmod{3}$ より、 $16^t + 4^t + 1 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3} \dots \textcircled{2}$

①, ②より、 $(4^t - 1), (16^t + 4^t + 1)$ はともに3の倍数であるといえる。

よって③の式は9で割り切れる。

このことより、一般に $2^{6t}$ は、

$$2^x \{(64^t - 1)/3\} \quad (x \in \mathbb{Z}, 0 \leq x)$$

$$2^u \quad (u \in \mathbb{N}, 6t \leq u)$$

からのみ出現するということがわかる。

## 4. 今後の展望

今回は $2^{6t}$ の場合の規則性を見つけることができた。今後の研究では、他の倍数の規則性やステップ数の規則性についても見ていきたいと考えている。

### 参考資料

<https://waka-blog.com/?p=3178>

<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%B3%E3%83%A9%E3%83%84%E3%81%AE%E5%95%8F%E9%A1%8C>

### 謝辞

本研究にあたり協力してくださいました中村一葉様、小川翼様、熱心なご指導を頂いた顧問の川口慎二教諭に感謝の意を表します。