

# 双極座標系についての考察

岡田俊祐, 棟朝ゆかり  
Shunsuke OKADA, Yukari MUNETOMO  
奈良県立奈良高等学校  
【キーワード】座標, 角度, 三角関数

## 1. はじめに

一般に, 平面上の点の位置を表す場合には直交座標系や極座標系などが使われるが, これらはそれぞれ2つの長さ, 1つの長さ1つの角度を用いて位置を定める. そこで, 長さを使わずに2つの角度を用いて点の位置を表す方法として双極座標系という新たな座標系を考案し, その特性について調べた.

## 2. 目的

双極座標系において様々な図形を方程式で表し, 既存の座標系よりも簡単に表すことができるかを調べる.

## 3. 定義

双極座標系を以下のように定義する:  
平面上に2つの原点  $O_1, O_2$  を定め, 点  $P$  の位置を  $O_1P$  と  $O_1O_2$  のなす角  $\theta_1$ , および  $O_2P$  と  $O_1O_2$  のなす角  $\theta_2$  で表す座標系.

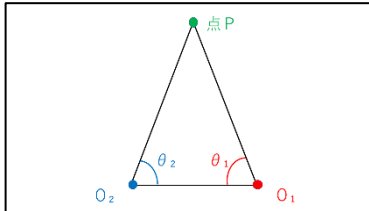


図1  
双極座標系の定義

## 4. 方法

プログラミングツールScratchを用いて双極座標系におけるグラフを描画するプログラムを作成し, 計算結果を視覚的に表して, その特徴を考察した.

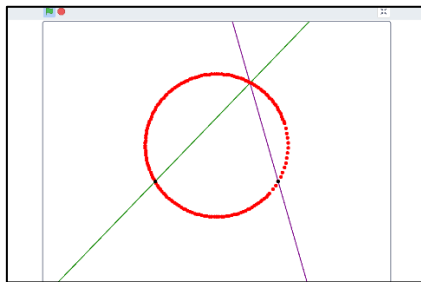


図2 Scratchで描画したグラフ ( $\theta_1 + \theta_2 = 60^\circ$ )

## 5. 結果

直交座標系から双極座標系への座標変換を行うための関数を求めた.

$$x = \frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\sin(\theta_1 + \theta_2)} \times 2d$$
$$y = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \times 2d$$

そして, 図形の性質と求めた関数を使って, 以下のように様々な図形を表す方程式を求めた.

- 1つの原点を通る直線:  $\theta_1 = a$   
 $\theta_2 = a$
- 2つの原点を通る円:  $\theta_1 + \theta_2 = a$
- 2つの原点を通る直角双曲線:  $\theta_1 - \theta_2 = a$
- 2つの原点間を結ぶ線分の中点を通り, 軸が

直線  $O_1O_2$  である放物線:  $\frac{1}{\sin^2\theta_1} - \frac{1}{\sin^2\theta_2} = a$

ただし,  $a$  は0以外の定数.

## 6. 考察

限定的ではあるが, 多くの二次曲線が簡単な方程式で表されたことから, この座標系は二次曲線を表現するのに適していると考えられる.

## 7. まとめ

長さを用いない座標系でも, 一部の曲線を簡単に扱えることが分かった. 今後は原点を通らない一般の位置の二次曲線の考察や, 二点から行う天体の軌道の観測への応用を行っていきたい.

## 謝辞

指導を行っていただいた山本先生, 今西先生に感謝を申し上げます.

## 参考文献

- 1) 川中宣明 ほか13名「改訂版 数学Ⅲ」
- 2) 高校数学の美しい物語 直交座標と極座標(2次元)の変換とメリットの比較  
<https://manabitimes.jp/math/1067>