関数の相似

2 年 9 組　　大沼　優吾、幸田　真尋、中西　創司
指導教諭　　槙原　洋介、谷　朋輝、今西　孝文

1　要約

二次関数が全て相似であることは有名だが，他の関数についてはあまり研究がなされていない．そこで,「ある関数と相似な関数」を生み出す操作を考案した．本研究では,「相似」に関連する移動について考察し，またそれを用いて，幾何問題に対する代数的なアプローチを行うことを目的とする．

ABSTRACT

It is well known that all quadratic functions are similar, but not much research has been done on other types of functions. Therefore, we devised an operation that produces "a function that is similar to another function". The purpose of this study is to discuss the transfers associated with "similarity" and use them to provide an algebraic approach to geometric problems.

キーワード
関数、相似、回転移動

Key word
function,similarity,rotation

2　緒言

有名事実として二次関数は全て相似であることが知られている．そこで私たちは他の関数に関してもこのことについて考察することにした．

3　目的

拡大縮小のみでの相似を導出する関数は存在したが，その他の移動を組み合わせたものは存在しなかったため，私たちは平行，回転，線対称移動を含めた全ての相似について考察することにした．

4　研究内容

4.1　方法

計算での導出の後，数学ソフトウェアの GeoGebra を用いて検証を行った．

4.2　研究結果

4.2.1　拡大縮小

陰関数 $f(x,y)=0$ を原点中心に k (k は 0 でない実数) 倍に拡大させた関数は次のように表せる．

$$f(\frac{x}{k},\frac{y}{k})=0$$

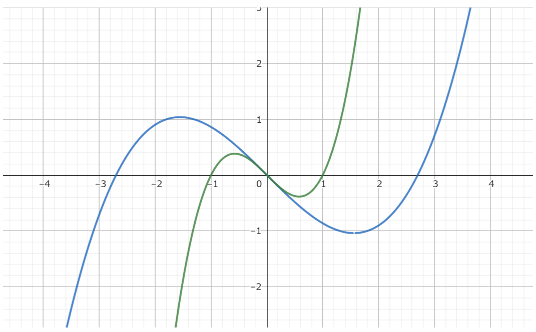

図 1　拡大縮小の様子

4.2.2 平行移動

陰関数 $f(x,y)=0$ を x 軸方向に m ，y 軸方向に n （ m,n は実数）だけ平行移動させた関数は次のように表せる．

$$f(x-m,y-n)=0$$

4.2.3 回転移動

陰関数 $f(x,y)=0$ を原点中心に θ 回転させた関数は次のように表せる．

$$f(x\cos\theta+y\sin\theta, y\cos\theta-x\sin\theta)=0$$

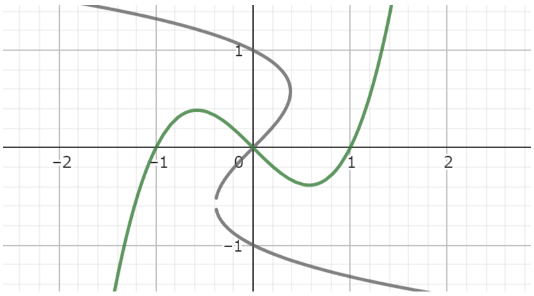

図 2 回転移動の様子

4.2.4 線対称移動

元々は陰関数 $f(x,y)=0$ を直線 $ax+by+c=0$ を軸に対称移動をさせることを考え，以下の関数を得た．

$$f(\frac{(b^2-a^2)x-2aby-2ac}{a^2+b^2},$$

$$\frac{-2abx+(a^2-b^2)y-2bc}{a^2+b^2})=0$$

しかしこれではあまりにも複雑である．そこでまずは $b\neq 0$ とし，直線 $ax+by=0$ を軸として対称移動させることを考えた．このとき，$tan\alpha=-\frac{a}{b}$ と定めると，移動後の関数は以下のようになった．

$$f(x\cos 2\alpha+y\sin 2\alpha, x\sin 2\alpha-y\cos 2\alpha)=0$$

しかしその後，平行移動と回転移動を考慮することで線対称移動は $f(x,-y)=0$ の操作で十分であることがわかった．

4.2.5 全ての相似な関数

以上のことより，陰関数 $f(x,y)=0$ と相似な関数はたとえば次のように表せる．
（線対称→拡大→平行→回転の順番で変化させた場合）

$$f(\frac{x\cos\theta+y\sin\theta-m}{k},$$

$$\pm\frac{y\cos\theta-x\sin\theta-n}{k})=0$$

注：移動の順番によりこの関数の式は変化するが，最終的な結果は変わらない．

4.2.6 研究前半での検証

関数の相似を使用することにより，以下の等式を証明できることが分かった．（ただし l は 0 でない実数，$g(x)=lf(\frac{x}{l})$ とする．）

1. $$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{l^2}\int_{la}^{lb} g(x)dx$$
2. $$\int_a^b \sqrt{1+\{\frac{d}{dx}f(x)\}^2}dx$$
$$=\frac{1}{l}\int_{la}^{lb}\sqrt{1+\{\frac{d}{dx}g(x)\}^2}dx$$
3. $$\int_a^b f(x)^2dx=\frac{1}{l^3}\int_{la}^{lb} g(x)^2dx$$

1 は面積比，2 は線分比，3 は体積比を用いることで導出可能である．

4.2.7 追加での検証

研究しているとき，次のようなことが分かった．以下 $\triangle ABC$ の垂心を H とする．
（命題 4.2.7.1 ）$\triangle ABC, \triangle AHB, \triangle BHC, \triangle CHA$ の外接円をそれぞれ $\omega, \omega_C, \omega_A, \omega_B$ とするとき，$\omega\equiv\omega_A\equiv\omega_B\equiv\omega_C$ である．
このことから次のことができる．
・3 点 A,B,C と $\triangle ABC$ の外心 O の位置が分かっている．このとき， H をコンパスのみで作図する．
（方法）
1, 線分 OA の長さをとり，点 A,B にそれぞれ針を刺して円をかき，その 2 円の交点のうち点 O でないほうを点 O_C とする．
2, そのままの長さで点 A,C にそれぞれ針を刺して円をかき，その 2 円の交点のうち点 O でないほうを点 O_B とする．
3, そのままの長さで点 O_C,O_B にそれぞれ針を刺して円をかき，その 2 円の交点のうち点 A でないほうが H である．
また，次のことが成り立つことがわかった．
（命題 4.2.7.2 ）$\triangle ABC$ について，その外心

を O とし，点 O を直線 AB, BC, CA を軸に対称移動させた点をそれぞれ O_C, O_A, O_B としたとき，直線 AO_A, BO_B, CO_C は一点で交わる．

5　考察

全ての移動を考えた相似な関数は少し複雑なものの導出できることがわかった．このことを上手く使うことで，関数同士が相似な対応をしているか判別することもできるのかと考えたが，計算処理が重いものであった．

6　まとめ

今回の研究で全ての相似な関数を考えることができた．これからは前半，追加検証のような解析や幾何を交えた分野に利用できるような使い方を考え，関数同士が相似な対応をしているかどうかを判別することができるようになればよいと考えた．

7　参考文献

https://manabitimes.jp/math/702（高校数学の美しい物語　全ての放物線が相似であることの証明）
https://manabitimes.jp/math/793（高校数学の美しい物語　関数のグラフの拡大・縮小の証明と例）

8　謝辞

ご指導を賜りましたすべての先生方にこの場をお借りして，深く御礼申し上げます．

9　付録（計算、証明方法）

9.1　拡大縮小の導出

$f(x, y) = 0$ 上の点 (s, t) を原点中心に $k (\neq 0)$ 倍拡大した点を (X, Y) とすると，

$$\left\{ \begin{array}{l} X = ks \\ Y = kt \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} s = \frac{X}{k} \\ t = \frac{Y}{k} \end{array} \right.$$

よって，陰関数 $f(x, y) = 0$ を原点中心に k 倍に拡大させた関数は次のように表せる．

$$f(\frac{X}{k}, \frac{Y}{k}) = 0$$

9.2　回転移動の導出

点の移動は回転行列を用いることで表せる．$f(x, y) = 0$ 上の点 (s, t) を原点中心に θ 回転した点を (X_1, Y_1) とすると，

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

よって，

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = s\cos\theta - t\sin\theta \\ Y_1 = s\sin\theta + t\cos\theta \end{array} \right.$$

これを (s, t) について解くことで，

$$\left\{ \begin{array}{l} s = X_1\cos\theta + Y_1\sin\theta \\ t = Y_1\cos\theta - X_1\sin\theta \end{array} \right.$$

よって陰関数 $f(x, y) = 0$ を原点中心に θ 回転させた関数は次のように表せる．

$$f(x\cos\theta + y\sin\theta, y\cos\theta - x\sin\theta) = 0$$

9.3　命題 4.2.7.1 の証明

点 A を直線 BC を軸に対称移動させた点を A' とする．
このとき，$\triangle ABC \equiv \triangle A'BC$．
有名事実より，点 H は $\triangle A'BC$ の外接円上にある．
よって，$\triangle A'BC$ の外接円は ω_A と一致する．
よって，$\omega \equiv \omega_A$ ．
同様にして，$\omega \equiv \omega_B, \omega \equiv \omega_C$ なので，

$$\omega \equiv \omega_A \equiv \omega_B \equiv \omega_C \qquad \blacksquare$$

9.4　命題 4.2.7.2 の証明

$\triangle ABC$ が二等辺三角形のとき，自明．
$\triangle ABC$ が不等辺三角形のとき，$AH \parallel OO_A$ ．
有名事実より，$AH = OO_A$ ．よって、四角形 AHO_AO は平行四辺形である．
平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるので，直線 AO_A は線分 HO の中点を通る．
同様に，直線 BO_B, CO_C も線分 HO の中点を通る．
以上より，示された．　$\blacksquare$