双極座標系についての考察

岡田俊祐、棟朝ゆかり
Shunsuke OKADA, Yukari MUNETOMO
奈良県立奈良高等学校

1. 要約

座標系には様々なものがあるが, 角度のみで点を表す座標系についてはあまり研究がなされてこなかった. そこで, 新しく角度のみで点を表す「双極座標系」を考案した. この研究では, 双極座標系におけるグラフと方程式の関係について調べ, またそれを実生活に応用することを目的とする.その結果, 双極座標系は二次曲線を表現するのに適し, 天体観測への応用が期待できることが分かった.

ABSTRACT

Although there are various coordinate systems, not much research has been done on those systems that use only angles to represent points. Therefore, we created a new coordinates system, called the "Twin-polar coordinate system", which uses only angles to represent points. The purpose of this study is to investigate the relationship between graphs and equations in the Twin-polar coordinate system and to apply it to real-life situations. The results of this study showed that the Twin-polar coordinate system is suitable for representing quadratic curves and has potential applications in astronomical observations.

【キーワード】　座標系, 角度, 二次曲線, 天体の軌道
Key word　Coordinate system, Angle, Quadratic curve, Astronomical orbit

2. はじめに

一般に, 平面上の点の位置を表す場合には直交座標系や極座標系などが使われるが, これらはそれぞれ 2 つの長さ, 1 つの長さと 1 つの角度を用いて点の位置を定める. そこで, 長さを 使わずに 2 つの角度を用いて点の位置を表す方法として双極座標系という新たな座標系を 考案し, その特性について調べた.

3. 目的

双極座標系において様々な図形を方程式で表し, 既存の座標系よりも簡単な式で表すことができないかを調べる.また, 円を表す方程式を応用して, 年周視差を用いた恒星の軌道の観測方法を提案する.

4. 方法

(1)定義

双極座標系を以下のように定義する:
平面上に 2 つの極 O_1・O_2を定め, O_1を第一極, O_2を第二極とする. また, 線分 O_1O_2を始線として極 O_1を通る直線ℓ_1, 極 O_2を通る直線ℓ_2を引き, ℓ_1とℓ_2の交点を点 P とする. (ただし$\ell_1 \nparallel \ell_2$)
このとき, $\angle PO_1O_2$をθ_1, $\angle PO_2O_1$をθ_2とする. (ただし, θ_1は反時計回りを正, θ_2は時計回りを正とし, 角度は mod180° で同一視する.)
このとき, 点 P の座標を（θ_1, θ_2）と表すものとする.
(注)$\ell_1 = O_1O_2$または$\ell_2 = O_1O_2$のとき, $\angle PO_1O_2$, $\angle PO_2O_1$は一意に定まらない.

(2)方法

プログラミングツール Scratch を用いて双極座標系におけるグラフを描画するプログラムを作成し, 計算結果を視覚的に表して, その特徴を考察した.また、微分などの複雑な計算には計算知能の Wolfram Alpha を使用した.

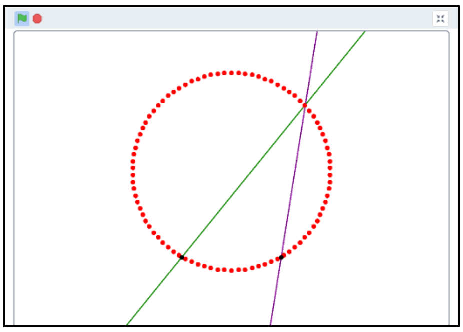

図 1　Scratch を用いたグラフの描画
赤色の点線がグラフを表す

5. 結果

＜結果 1＞

図形的な性質を使って，以下の図形を表す方程式を求めた. (以下, aは定数とする)

・1 つの原点を通る直線：$\theta_1 = a$, $\theta_2 = a$
　一方の角度のみを固定することで，その直線上を動く.

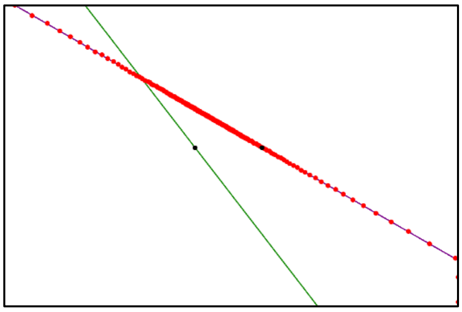

図 2　1 つの原点を通る直線

・2 つの原点を通る円：$\theta_1 + \theta_2 = -a$ ($a \neq 0$)
　円周角の定理の逆より，同一円周上を動く

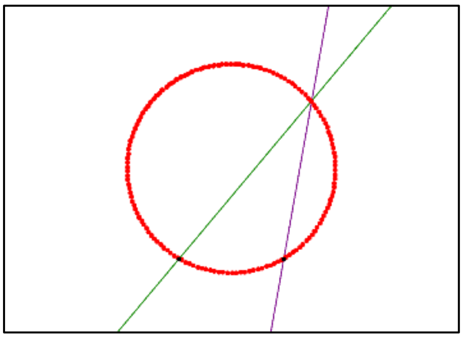

図 3　2 つの原点を通る円

＜結果 2＞

直交座標系から双極座標系への座標変換を行うための式を求めた.（詳細は appendix に記す）

xとyで表された直交座標系での方程式にこれを代入することで，直交座標系におけるグラフの形を維持したまま，点(0,-1)を第一極，点(0,1)を 第二極とする双極座標系における方程式に変換することができる.

$$\begin{cases} x = \dfrac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ y = \dfrac{2\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{cases}$$

そして，この変換式を使って，以下のように様々な図形を表す方程式を求めた.

・2 つの原点を通る直角双曲線：$\theta_1 - \theta_2 = a$
（a=0 の時線分 O_1O_2の垂直二等分線）

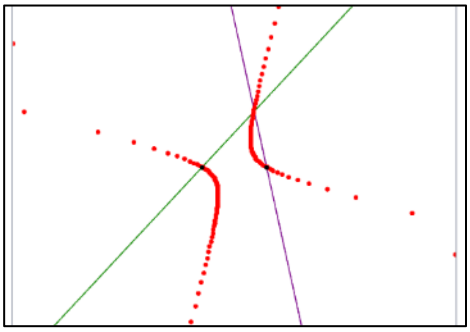

図 4　2 つの原点を通る直角双曲線

・2 つの原点間を結ぶ線分の中点を通り，軸が直線 O_1O_2である放物線：

$$\frac{1}{\sin^2\theta_1} - \frac{1}{\sin^2\theta_2} = a$$

（a=0 の時線分 O_1O_2の垂直二等分線）

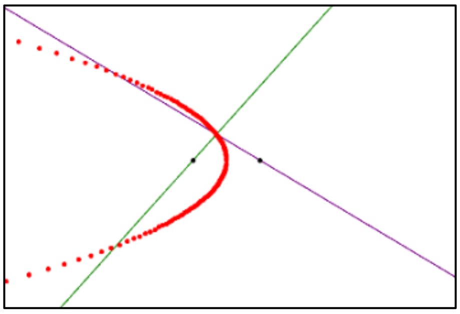

図 5　2 つの原点間を結ぶ線分の中点を通り，
軸が直線 O_1O_2である放物線

・中心が O_1O_2の垂直二等分線上にあり，中心と始線との距離がa, 半径がrの円：

$$\left(\frac{-\sin(\theta_1 - \theta_2)}{2\sin(\theta_1 + \theta_2)} \times 2\mathrm{d}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \times 2\mathrm{d}\right)^2 = r^2$$

(2d は二極間の距離)

＜結果 3＞

結果 2 の最後の円の方程式はあまりに複雑であるため，扱いが困難であり，グラフの描画

も行えなかった．そこで，この方程式を $\theta_2 = \mathrm{f}(\theta_1)$ という関数と見て，円周上の最も始線に近い点で二次近似を行った．その結果，次のようになった: （詳細は appendix に記す）

$$\theta_2 \simeq \alpha - (\theta_1 - \alpha) + \frac{a^2 - r^2 + 1}{r(a-r)^2}(\theta_1 - \alpha)^2$$

（ここで，$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|a-r|}{\sqrt{(a-r)^2+1}}\right)$ であり，点 $(\theta_1, \theta_2) = (\alpha, \alpha)$ は円周上の最も始線に近い点である）

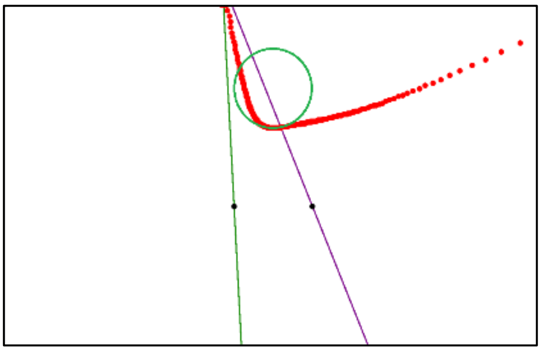

図 6　$(a, r) = (3,1)$ としたときの近似式のグラフ

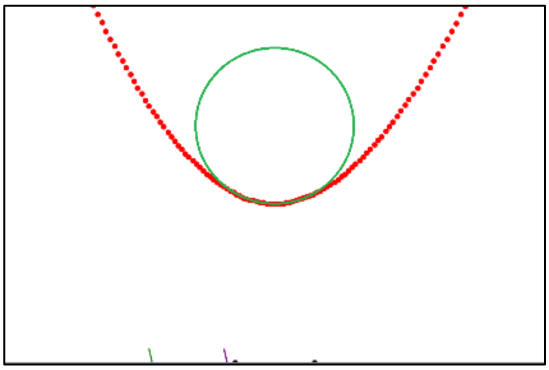

図 7　$(a, r) = (50,2)$ としたときの近似式のグラフ
a や r の値が大きいほど近似の制度が良くなる

これを用いることで，地球に近い位置で公転している恒星の軌道を，それが円であると仮定したとき, 2 つの観測データから予測することができる．

6. 考察

円，放物線，双曲線等が簡単な方程式で表されたことから，この座標系は二次曲線を表現するのに適していると考えられる．しかし，極を通らないような図形を表す方程式は非常に複雑で扱いにくいものになることが分かった．また，以下の条件を満たした場合に恒星の軌道に近いものを特定できることが分かった：

・恒星の公転面が太陽を含む
・恒星が円軌道をしている
・恒星が軌道の中で太陽に近い位置にある
・恒星の軌道の中心が O_1O_2 の垂直二等分線上にある

厳しい制約であるが，条件に合った軌道の予測には応用の見込みがあると考えられる．

7. まとめ

２つの極があることで使いづらいというデメリットがあるが，長さを用いない座標系でも，一部の曲線を簡単に扱えることが分かった．また，複雑な方程式も,近似することで実生活への応用が期待できることが分かった．今後はより一般の位置にある円や双曲線，時刻を媒介変数として表した二次曲線，三次元への拡張などの研究を続けていきたい．

謝辞

ご指導を賜りましたすべての先生方にこの場をお借りして、深く御礼申し上げます。

引用文献

1)　川中宣明　ほか 13 名「改訂版　数学III」
2) 高校数学の美しい物語　直交座標と極座標（2 次元）の変換とメリットの比較
https://manabitimes.jp/math/1067

Appendix

(i)座標変換式の導出

点(0,-1)を第一極，点(0,1)を第二極とする．θ_2 が時計回りであることに留意すると，直線 ℓ_1，直線 ℓ_2 の方程式はそれぞれ

$$y = \tan\theta_1 \times (x+1),\ y = -\tan\theta_2 \times (x-1)$$

となる．ここから x を消去することで y の式を得る．

$$\frac{y}{\tan\theta_1} - 1 = -\frac{y}{\tan\theta_2} + 1$$

$$\therefore\ \frac{y}{\tan\theta_1} + \frac{y}{\tan\theta_2} = 2$$

$$\therefore\ y = \frac{2}{\frac{1}{\tan\theta_1} + \frac{1}{\tan\theta_2}}$$

$$= \frac{2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1}$$

$$= \frac{2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

これを元の式に代入して，

$$\frac{2\sin\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = \tan\theta_1 \times (x+1)$$

$$\frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = x+1$$

同様にして，

$$\frac{-2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)} = x-1$$

これらを足し合わせて，xの式を得る.

$$2x = \frac{2\cos\theta_1 \sin\theta_2 - 2\sin\theta_1 \cos\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\sin(\theta_1+\theta_2)}$$

(ii)近似の計算

円周上の最も始線に近い点は対称性より$(\theta_1, \theta_2) = (\alpha, \alpha)$と表される．円の中心から始線に垂線を下ろし，三平方の定理を用いることで，

$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|a-r|}{\sqrt{(a-r)^2+1}}\right)$が分かる.

この点で二次の項までテイラー展開を行うため，$f'(\alpha)$，$f''(\alpha)$の値を求める.

対称性より，$f'(\alpha) = -1$である.

$f''(\alpha)$は, Wolfram Alpha を用いて計算すると以下のようになった:

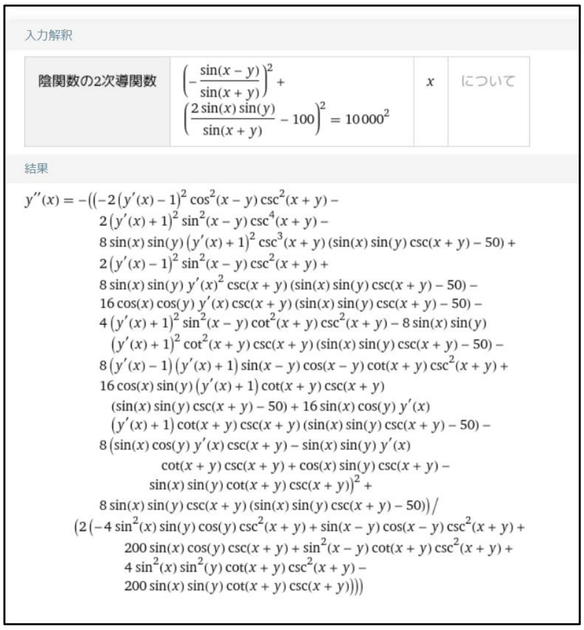

図 8　Wolfram Alpha を用いた$f''(\alpha)$の計算

この式に$x = y = \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|a-r|}{\sqrt{(a-r)^2+1}}\right)$,

$f'(\alpha) = -1$を代入し整理することで，次を得る:

$$f''(\alpha) = \frac{a^2 - r^2 + 1}{r(a-r)^2}$$

したがって，求める近似式は次のようになる.

$$\theta_2 \simeq f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\theta_1 - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\theta_1 - \alpha)^2$$

$$\therefore \quad \theta_2 \simeq \alpha - (\theta_1 - \alpha) + \frac{a^2 - r^2 + 1}{r(a-r)^2}(\theta_1 - \alpha)^2$$